Colle du 14/02 - Sujet 1
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant $P'P'' = 18P$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Monter que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n$ est minorée par le terme général d'une suite divergente.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$ et $w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$
4. En déduire que ces deux suites sont adjacentes.
5. Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Colle du 14/02 - Sujet 2
Suites et polynômes

Question de cours. Montrer que deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Exercice 1. Déterminer a, b et c tel que $P = X^6 + aX^4 + 10X^3 + bX + c$ admette une racine de multiplicité 4. Factoriser alors le polynôme.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

Colle du 14/02 - Sujet 3
Suites et polynômes

Question de cours. Démontrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ divise P. *On admettra l'initialisation.*

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $[1/2, 1]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et en déduire qu'elle converge.
3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Montrer que P divise $X^{n+1} - 1$ et déterminer $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^{n+1} - 1 = PQ$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$.